المحاضرة 12 من المثال 2 . الأحد 2015/12/27

تقتصر هنا بتبسيطه مثلاً: $E = [0,1]$.

(*) سنتعرف الآن مفهوم جديد ألا وهو مفهوم ((تقريباً في كل مكان على مجموعة أو في كل مكان تقريباً أو تكاد تكون محققة في كل مكان تقريباً)) .

مفهوم الخاصية المحققة تقريباً في كل مكان:

يُقال عن علاقة ما (خاصية رياضية ما) أنها محققة تقريباً في كل مكان على المجموعة $E \ni x$ إذا كانت العلاقة أو الخاصية (*) محققة على $E - E_0$

مثلاً: $x \in \mathbb{R} - \{3\}$; $\frac{x-2}{x-3}$ ونكتب في هذه الحالة $\overset{a.e}{(*)}$ أي أن هذه الخاصية محققة من أجل كل $x \in E$ ربما فيما عدا مجموعة جزئية $E_0 \subseteq E$ بحيث أن $\lambda(E_0) = 0$ ← λ قياس ليبيغ و E_0 في قيوسة أو كولة. والعنصر $x \in E$ إما أن يحقق هذه الخاصية أم لا. ويمكن لهذه الخاصية أن تكون مثلاً التساوي بين دالتين - الاستمرار - الاشتقاق - التقارب النقطي - ...

مثال:

دالة ديرخليه المعرفة سابقاً على الفترة $[0,1]$ تساوي 0 تقريباً في كل مكان على هذه الفترة أي أن: $\varphi(x) \overset{a.e}{=} 0$ حيث:

$x \in [0,1] - \mathbb{Q}$; $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$

← عدودة ومقيسة.

مثال 2 (مبرهنة):

إذا كانت كل من الدالتين f_1, f_2 متساويتان تقريباً في كل مكان على المجموعة E المقيسة وكانت احداهما قيوسة على E فإن الأخرى هي أيضاً قيوسة على E أيضاً. $f_1 \overset{a.e}{=} f_2$

تطبيق:

$$f_1 = \frac{x^2-16}{x-4} = f_2 = x+4 \; ; \; x \in \mathbb{R} - \{4\}$$

متساويتان دوماً إلا عند $x=4$ حيث:

$$\lambda(\{x\}) = \lambda(\{4\}) = 0$$

مبرهنة:

دالة قيوسة و $\overset{a.e}{=} 0$ يكون تكامل ليبيغ لها يساوي الصفر.

مثال 2:

الدالة الثابتة - المطردة بكافة أنواعها - الدالة المستمرة - الدالة ح.ت.م

الدالة التي تملك مشتقاً يكون هذا المشتق دالة قيوسة على فترة التعريف ،
جميع الدوال التي ذكرت دوال قيوسة وعلى مجموعات تعريفها حيث يجب أن تكون مجموعة التعريف دالة مقيسة .

ثالثاً: تكامل ليبيغ للدوال القيوسة والمحدودة :

في هذا التكامل سنتعامل مع الدوال القيوسة على مجموعات مقيسة وقياسها محدود $\lambda(E) < \infty$ فتكلمنا أضف إلى ذلك أن الدالة محدودة على هذه المجموعة .

مبرهنة (اختبار ليبيغ):

لكي تكون الدالة f كمولة ريمانياً على $[a,b]$ يلزم ويكفي أن تكون هذه الدالة محدودة على $[a,b]$ وقياس مجموعة نقاط انقطاعها معدوم (أي أن تكون الدالة f مستمرة a.e على الفترة $[a,b]$)

ملاحظة:

الدوال المستمرة a.e على الفترة $[a,b]$ أو على المجموعة E المقيسة هي قيوسة عليها.

$$\beta(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}$$

مثال:

دالة ديرخليه المعرفة لدينا ليست كمولة ريمانياً على $[a,b]$ رغم أنها محدودة عليها .

- سيتضح لنا من دراستنا أن صف الدوال الكمولة حسب مفهوم ليبيغ أوسع من صف الدوال الكمولة ريمانياً .

نتيجة:

من خلال هذه النتيجة سنتعلم كيف نتحدث عن تكامل ليبيغ ووجوده اضافة لحسابه .

- كل دالة f قيوسة ومحدودة على مجموعة E مقيسة حيث $\lambda(E) < \infty$ تكون كمولة حسب مفهوم ليبيغ أو كمولة لوبيغياً على E أي أن التكامل

$$(L)\int_E f \, d\lambda(x) = (L)\int_E f \, d\lambda .$$

مثال:

دالة ديرخليه قيوسة ومحدودة على الفترة المقيسة $[a,b]$ ~~بالتالي~~ و $\lambda(\underbrace{[a,b]}_{E}) = b-a$ تكون كمولة حسب ليبيغ .

Scanned by CamScanner

أي أن

$$I = (L)\int_E \varphi(x)\, d\lambda$$

موجود حسب ليبيغ.

بعضا الخواص لتكامل ليبيغ:

f قيوسة محدودة، E مقيسة وقياسها محدود أي ($\lambda(E) < \infty$).

خ1) إذا كانت $f(x) = c$ دائماً كانت $x \in E$ يكون

$$\int_E f\, d\lambda = \underset{\text{محدود}}{c} \cdot \lambda(E) < \infty$$

خ2) إذا كانت $E = \bigcup_k E_k$ كاتحاد معدود أو منتهٍ للمجموعات المقيسة منفصلة مثنى مثنى E_k عندئذ يكون

$$\int_E f\, d\lambda = \sum_k \int_{E_k} f\, d\lambda.$$

حيث يرمز $\sum$ لمجموعة منتهية أو معدود حسب ما يكون الاتحاد $\bigcup_k$ منتهياً أو غير منتهٍ لمجموعات

خ3) نبقى الفرضيات السابقة وأضف إذا كان $f \leq g(x);\ x \in E$ دالة عندئذ كمان تكامل ليبيغ وسيلة يكون

$$\int_E f\, d\lambda \leq \int_E g\, d\lambda.$$

وكحالة خاصة إذا كان $f \geq 0;\ x \in E$

$$\int_E f\, d\lambda \geq 0$$

خ4) إذا كانت f, g دالتان قيوستان ومحدودتان ومتساويتان تقريباً كل مكان على المجموعة E يكون:

$$\int_E f\, d\lambda = \int_E g\, d\lambda .$$

نتيجة:

إذا كانت $0 \overset{a.e}{=} f$ على المجموعة E فإن:

$$\int_E f\, d\lambda = 0$$

وهذا ينتج من (4) بوضع $g = 0$ حيث $\forall x \in E$.

ملاحظة:

عكس الخاصة (4) ليس صحيحاً بشكل عام ولكننا إذا افترضنا أن $f(x) \geq 0$ (غير سالبة أو موجبة) وقيوسة ومحدودة على المجموعة E عندها إذا كان:

$$\int_E f\, d\lambda \Longrightarrow f \overset{a.e}{=} 0$$

والمثال التالي يوضح أن العكس غير صحيح بالضرورة.

مثال:

نعرف:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & ; \ 0 > x \geq -1 \\ 2 & ; \ 1 \geq x \geq 0 \end{cases} \quad ; \ x \in E = [-1,1].$$

هنا لدينا جميع شروط تكامل ليبيغ (حسب مفهومه) مستوفاة. لأن:

$$\int_{[-1,1]} f\, d\lambda = \int_{[-1,0)} f\, d\lambda + \int_{[0,1]} f\, d\lambda = 0$$

رغم أن الدالة f المعرفة $\neq 0$ في أي نقطة على الفترة $[-1,1]$.

ملاحظة:

بالنسبة لبقية خواص تكامل ليبيغ هي نفس خواص تكامل ريمان وستيلتجس.

(إضافة) إذا كانت f دالة مقيسة ومحدودة على E عندها يكون لدينا:

$$\left| \int_E f\, d\lambda \right| \leq \int_E |f|\, d\lambda$$

العلاقة بين تكاملي ريمان وليبيغ:

مبرهنة:

كل دالة f مكاملة ريمانياً على فترة مثل $E = [a,b]$ تكون هذه الدالة مكاملة حسب مفهوم ليبيغ كما أن

$$(L)\int_a^b = (L)\int_{[a,b]} f\, d\lambda = (R)\int_a^b f\, d\lambda.$$

إلا أن عكس هذه المبرهنة ليس صحيحاً في الحالة العامة والمثال على ذلك يوضحه لنا دالة ديرخليه على الفترة $E = [0,1]$ حيث أنها مكاملة لوبيغياً شرط فيما بعد وليست مكاملة ريمانياً على هذه الفترة. مما يدلنا على أن تكامل ليبيغ هو تعميم لتكامل ريمان.

مبرهنة:

لتكن f دالة محدودة على الفترة $[a,b]$ عندها تكون الدالة f مكاملة ريمانياً على هذه الفترة $\Longleftrightarrow$ الدالة f مستمرة a.e على الفترة $[a,b]$.

مثال:

أي الدوال التالية قيوسية ولماذا؟

$f(x) = e^{x} + \ln x \quad ; \quad x \in [1, 10]$ مستمرة فهي قيوسية

$g(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad , \; x \in [0, 1]$ مستمرة.

$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n} \quad ; \quad x \in [0, \frac{3}{4}]$

$h(x) = \frac{1}{1-x}$ تقريباً مستمرة على الفترة $[0, \frac{3}{4}]$ (متسلسلة دوال لها مجموع على هذه الفترة). فهي قيوسية. لأن حدودها مستمرة.

ذكرنا أن الدالة الصحيحة قيوسية

$\varphi(x) = [x]$

مستمرة a.e لأن المجموعة التي قياسها 0 هي قيوسية. مستمرة على $x \in R - Z$ شكل $[0, 10] - Z$.

أي هي مستمرة a.e لأن مجموعة نقاط الانقطاع هي Z قياسها 0. على R

$\lambda(Z) = 0$

- كل الدوال السابقة قيوسية.

مثال (1):

الدالة $f(x) = [x]$ ذكرنا على $[0,5]$ فهي قيوسية وكمان هي مستمرة a.e على الفترة $[0,5]$ ومحدودة. (يوجد أسباب).

مثال (2):

بيّن أن المجموعة $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{3}{n}, \frac{3}{n} + \frac{1}{7^n}]$ ~~$D = \bigcup \frac{3}{n}, \frac{3}{n}+$~~

قيوسة حسب ليبيغ واحسب قياسها.

الحل:

لنضع: $D_n = [\frac{3}{n}, \frac{3}{n} + \frac{1}{7^n}] \; ; \; n \geq 1$

D اتحاد عدود غير منته لفترات مغلقة.

نلاحظ أن D_n عبارة عن فترة مغلقة ولذا فهي قيوسة حسب ليبيغ أي أن

$D_n \in \mathcal{L} \quad (n \geq 1)$

بالتالي تكون المجموعة D مقيسة حسب ليبيغ لأنها تقاطع عددي لمجموعات مقيسة حسب ليبيغ. وذلك حسب برهنة سابقة.

وأيضاً المجموعة التالية مقيسة. $\bigcap_{n\geq 1}^{\infty} E_n$

وطالما أن: $\lambda(D_n) = b - a = \frac{1}{7^n}$

حيث $n \geq 1$

كذلك عندها يكون:

$\lambda(D) = \lambda\left(\bigcap_{n\geq 1}^{\infty} D_n\right) =$

$\sum_{n\geq 1}^{\infty} \lambda(D_n) = \lim \dfrac{1 - \frac{1}{7^{n+1}}}{1 - \frac{1}{7}}$

هندسية $|q| < 1$

$= \dfrac{\frac{7}{7}}{\frac{6}{7}} = \dfrac{7}{6}$

مع ملاحظة أن جميع المجموعات $D_1, \ldots$ منفصلة مثنى مثنى وهي المجموعات مقيسة.

مثال:

احسب تكامل ليبيغ التالي:

$I = (L)\int_{D} -3 \, d\lambda$

D السابقة

بعد التأكد من وجوده.

<u>الحل:</u>

لدينا ثابت $f(x) = -3 =$ $\forall x \in D$

بما أن الدالة f ثابتة محدودة حسب مثال سابق ومحدودة و D مجموعة مقيسة قياسها $\lambda(D) = \frac{1}{6} < \infty$ وإذاً بالتالي هي يكون موجود حسب نتيجة من مفهوم ليبيغ.

حسابه:

$I = (L)\int_{D} -3 \, d\lambda = -3\,\lambda(D) = -3\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$

مثال (4):

ليكن S جبراً تاماً على X ، $x \in X$ ملعقنو بالتعريف:

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in A \\ 0 & ; \quad x \notin A \end{cases} \quad ; \quad A \in S.$$

δ_A

الدالة $\delta_x(A)$ المعرفة بالشكل السابق قياس يسمى قياس ديراك . وهو منته.

$\mu(X) < \infty$ بالتالي هو منته - منتهٍ جمعياً.

الدالة المميزة:

لتكن $A \subseteq E$ نسمي الدالة المعرفة بالشكل:

$$I_A : E \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$; x \longmapsto I_A(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in A \\ 0 & ; \quad x \in E - A = \tilde{A} \end{cases}$$

الدالة المميزة للمجموعة A على المجموعة E . ومن خواصها مثلاً:

1) $I_{\emptyset}(x) = 0$

2) $I_{A \cap B}(x) = I_A(x) \cdot I_B(x)$.

3) $I_{A \cup B}(x) = I_A(x) + I_B(x) - I_{A \cap B}(x)$.

حيث $E \supseteq A, B$

4) $I_{A \cup \tilde{A}}(x) = I_A(x) + I_{\tilde{A}}(x)$. حالة خاصة

لأن $A \cap \tilde{A} = \emptyset$

مثلاً:

$I_Q(x)$

تسمى الدالة المميزة للمجموعة Q .

ملاحظة:

تكون الدالة المميزة للمجموعة $A \subseteq E$ (مقيسة) (مقيسة) قيوسة على المجموعة E ، إذا وفقط إذا كانت المجموعة E مقيسة.

مثال:

أوجد تكامل ليبيغ للدالة المميزة للمجموعة A من الفترة $E=[0,3]$
أي:

$$(L)\int_E I_A(x)\,d\lambda = ?$$

بعد التأكد من وجوده.

الحل: من خواص الدوال القيوسة أيضاً: اذا كان f و g دوال قيوسة فإن

$$g \pm f \ ,\ f.g \ ,\ \frac{1}{f}\ (f\neq 0) \ ,\ \frac{f}{g}\ (g\neq 0) \ ,\ |f| \ ,\ f^2 \ ,\ \alpha f$$

$\alpha \neq 0$ ثابت

تكون قيوسة على مجموعة التعريف المقيسة.

مثال: لنثبت قيوسية الدالة المميزة I_A على المجموعة E حيث E مقيسة فرضاً (كمجموعة ومثال).

الإثبات:

لنفرض أن A مقيسة عندئذ من أجل أي $c\in \mathbb{R}$ يكون لدينا:

$$E(I_A > c) = \begin{cases} E & ; \ c<0 \\ A & ; \ 1>c\geq 0 \\ \emptyset & ; \ c\geq 1 \end{cases}$$

ونوجد قيمة تحت هذه المطلوبة.

مطلوب:

$E(|f|>c)$
$E(f^2>c)$
$\frac{1}{f}$
من الكتاب.

- بما أن المجموعات في الطرف الأيمن مقيسة $\forall c\in \mathbb{R}$ والذي يقتضي أن المجموعة $E(I_A > c)$ مقيسة أياً كانت c أي أن الدالة المميزة للمجموعة A على المجموعة E ~~مقيسة~~ قيوسة.

ملاحظة:

اذا كانت الدالة f قيوسة على المجموعة E فإن كلاً من المجموعات التالية:

$$E(f=+\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f>n) \qquad (1)$$

$$\int I_A(x)\, d\lambda = \int_A I\, d\lambda + \int_{\tilde{A}} \cdots = 1\, d\lambda$$

$E = A \cup \tilde{A}$

$$E(f = -\infty) = \bigcap_{n \geq 1}^{\infty} E(f < -n) \qquad (2).$$

كل من ①، ② تكون مقيسة حسب مفهوم ليبيغ.

مثال محلول تمرين 7 ص 204 مطلوب امتحانياً.

مثال:

احسب تكامل ليبيغ للدالة ديرخليه على الفترة $[0,1]$ بعد إثبات كونه موجوداً بكل من الطريقتين. أي المطلوب:

$$I = (L) \int_E \varphi(x)\, d\lambda$$

الحل: أولاً إثبات أن φ قيوسة ونذكر على الفترة المغلقة $[0,1]$ E حسب التعريف.

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 \; ; & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 \; ; & x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

حيث $\mathbb{Q}$ هي مجموعة الأعداد العادية من $\mathbb{R}$.

لدينا: $\forall c \in \mathbb{R}$

$$E(\varphi > c) = \begin{cases} \emptyset \; ; & c \geq 1 \\ [0,1] \cap \mathbb{Q} \; ; & 0 \leq c < 1 \\ E = \mathbb{Q} \cup \tilde{\mathbb{Q}} \; ; & c < 0 \end{cases}$$

وكون المجموعات في الطرف الأيمن مقيسة أياً كانت $c \in$ فهذا يعني أن الدالة φ قيوسة حسب التعريف.

الحديث عن التكامل الآن:

الطريقة ①: لنبين أن الدالة $\varphi \overset{a.e}{=} 0$ نعم لأن هذه الدالة $\varphi \overset{a.e}{\simeq} 0$

حيث $x \in [0,1]$ لأنه توجد $E_0 = \mathbb{Q}$ الدالة $\neq 0$ عليها مع أن

$$\lambda(\mathbb{Q}) = \lambda(E_0) = 0$$

$$E_0 = \{ x \in E \; ; \; \varphi(x) \neq 0 \} \subseteq \mathbb{Q}.$$

ومنه حسب خاصة من خواص تكامل ليبيغ

$$(L) \int_E \varphi\, d\lambda = 0 \; ; \quad \varphi \overset{a.e}{=} 0 \; ; \quad x \in [0,1]$$

مع أن التكامل موجود (φ دالة قيوسة ومحدودة $|\varphi| \leq 1$ حيث $x \in E$

والمجموعة E بوسطها على مقيسة و $\lambda([0,1]) = 1 < \infty$)

Scanned by CamScanner

ج) الحديث أولاً عن وجود التكامل. وفق الطريقة الثانية:
شرط وجود التكامل تحقق وحسب بالشكل:

$$(L)\int_E \varphi \, d\lambda = \int_{Q \cup \tilde{Q}} \varphi \, d\lambda = \int_Q 1 \, d\lambda + \int_{\tilde{Q}} 0 \, d\lambda$$

$$= 1 \cdot \lambda(Q) = 0$$

مثال: $f(x) = (x^2+1)[1 - \varphi(x)]$

احسب تكامل ليبيغ للدالة ↑ حيث φ دالة ديرخليه
وذلك بعد التأكد من وجوده. حيث $x \in [0,2]$.
- يحساب هذا التكامل سنتحول لحساب تكامل ريمان .

الحل: وجود تكامل.

مساوية: مستمرة $= (R)\int_E (x^2+1) \, dx$
الدالة مستمرة فهي تكون ريمانياً .

مثال حول تكامل ستيلجس المعتل:
يمكن التعبير عن كل متسلسلة (مجموع منته أولا) لا نهائية فتعطي رتب من
حدود حقيقية $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ على شكل تكامل ستيلجس لانهائي متقارب يحقق
لدينا:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \int_0^{\infty} f(x) \, d[x]$$

حيث أن f دالة معرفة على $]0, \infty[$ كالآتي:

$$f(x) = \begin{cases} a_k \; ; & 0 < x \le k \; ; \; k = 0, 1, \ldots \\ 0 \; ; & x = 0 \end{cases}$$

و $[x]$ دالة أكبر عدد صحيح.
التكاملات أينما وجدت فهي موجودة.
مثال:
اكتب المتسلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ على شكل تكامل ستيلجس لانهائي.

الحل:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \; ; & 0 < x \le n \\ 0 \; ; & x = 0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_{1}^{\infty} f(x)\, d[x] = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, d[x]$$

ملاحظة:

وبالعكس يصح كل تكامل ستيلجس لانهائي متقارب يكتب بالشكل :

$$\int_{0}^{\infty} f\, dg$$

يكتب بالشكل متسلسلة متقاربة .

مثال:

احسب التكامل المعتل:

واكتبه بالشكل مجموع متسلسلة.

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, d[x]$$